Realisation des modules irreductibles ayant un poids dominant dans des espaces des fonctions analytiques(Theory of prehomogeneous vector spaces)

AUTHOR(S):

ZHU, Yi

数理解析研究所講究録
924巻 1995年 254-262

Réalisation des modules irréductibles ayant un poids dominant dans des espaces des fonctions analytiques

Yi ZHU

Résumé - Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbf{C}$, soit $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et soit G un groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour tout $\nu \in \mathfrak{h}^*$, nous donnons une réalisation du $\mathfrak{g}-$module irréductible de poids dominant ν dans un espace de fonctions analytiques au voisinage de l'élément neutre dans G. Lorsque ν est le caractère de certaines sous algèbres de Levi ayant des propriétés particulières, nous obtenons plusieurs réalisations distinctes du même module.

A realization of irreducible highest weight module in a space of analytic functions

Abstract - Let $\mathfrak{g}$ be a simple Lie algebra over $\mathbf{C}$, let $\mathfrak{h}$ be a Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}$ and let G be a connected group with Lie algebra $\mathfrak{g}$. For all $\nu \in \mathfrak{h}^*$ we give a realization of irreducible $\mathfrak{g}-$module with highest weight ν in a space of analytic functions near the origin in G. If ν is the character of some Levi subalgebras having specific properties, we obtain several distinct realizations of the same module.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie, et soit $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit G un groupe connexe complexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note $\mathcal{R}$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$, et on fixe une base Ψ de $\mathcal{R}$. Soit θ une partie de Ψ.
On définit l'élément H_θ par les équations suivantes :

$$\alpha(H_\theta) = 2 \quad \text{si } \alpha \in \Psi \setminus \theta$$
$$\alpha(H_\theta) = 0 \quad \text{si } \alpha \in \theta.$$

On pose également

$$d_p(\theta) = \{X \in \mathfrak{g},\ [H_\theta, X] = 2pX\}.$$

On a ainsi

$$\mathfrak{g} = \oplus_{p\in\mathbf{Z}} d_p(\theta).$$

On pose

$$\mathfrak{n}_\theta^- = \oplus_{p<0} d_p(\theta),\ \mathfrak{l}_\theta = d_0(\theta),\ \mathfrak{n}_\theta^+ = \oplus_{p>0} d_p(\theta).$$

La sous algèbre parabolique $\mathfrak{p}_\theta$ associée à θ est définie par

$$\mathfrak{p}_\theta = \mathfrak{l}_\theta + \mathfrak{n}_\theta^+.$$

Si $d\lambda$ est un caractère de $\mathfrak{l}_\theta$, on peut étendre $d\lambda$ trivialement sur $\mathfrak{p}_\theta$ en posant

$$d\lambda(l+n) = d\lambda(l),\ l \in \mathfrak{l}_\theta,\ n \in \mathfrak{n}_\theta^+.$$

Tous les caractères de $\mathfrak{l}_\theta$ peuvent être ainsi considérés comme des caractères de $\mathfrak{p}_\theta$.

Définition 1 ([1]). — *On dit que* $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ *est un espace préhomogène de Dynkin-Kostant s'il existe un élément* $I^+ \in d_1(\theta)$ *et un élément* $I^- \in d_{-1}(\theta)$ *tels que* (I^-, H_θ, I^+) *est un* sl_2*−triplet.*

On suppose dans tout ce paragraphe que la couple $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est un espace préhomogène de Dynkin-Kostant.

Remarque 2
a) Les espaces préhomogènes de ce type (*Dynkin-Kostant*) *avaient déja été considérés par Rubenthaler* [2] *qui en avait donné une caractérisation* (*Proposition* 1.3.8 , p. 31).
b) Une étude détaillée des espaces préhomogènes de Dynkin-Kostant se trouve dans [1].
c) Les parties θ *correspondant à des espaces de Dynkin-Kostant comprennent les parties admissibles au sens de* [3]. *Donc notamment la partie* $\theta = \emptyset$ (*qui correspond à la sous algèbre de Borel*) *définit un espace préhomogène de Dynkin-Kostant.*

Soit

$$w = \exp_G I^+ \exp_G I^- \exp_G I^+ \in G.$$

Soit $\mathfrak{s}_2$ la sous algèbre engendrée par le sl_2–triplet (I^-, H_θ, I^+), et soit S_2 le sous groupe analytique de G correspondant à $\mathfrak{s}_2$. Puisque $SL(2, \mathbf{C})$ est simplement connexe, l'isomorphisme $d\varphi$ de $sl(2, \mathbf{C})$ sur $\mathfrak{s}_2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto I^-, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto I^+, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto H_\theta$$

nous donne un morphisme φ de $SL(2, \mathbf{C})$ sur S_2.
On notera que w^4 est l'élément neutre du groupe G et que $w^2 \in \exp_G \mathfrak{h}$. Et on a

$$\mathrm{Ad}w(\mathfrak{l}_\theta) = \mathfrak{l}_\theta, \ \mathrm{Ad}w(\mathfrak{n}_\theta^+) = \mathfrak{n}_\theta^-, \ \mathrm{Ad}w(I^+) = I^-, \ \text{et } \mathrm{Ad}w(I^-) = I^+.$$

Soient N_θ^+, N_θ^-, L_θ les sous groupes analytiques correspondant respectivement à $\mathfrak{n}_\theta^+$, $\mathfrak{n}_\theta^-$, $\mathfrak{l}_\theta$, soit $d\lambda$ un caractère de $\mathfrak{l}_\theta$. Soit P_θ le normalisateur de $\mathfrak{p}_\theta$ dans G. Soient $\widetilde{P_\theta}$ le revêtement universel de P_θ et $\pi : \widetilde{P_\theta} \to P_\theta$ la projection canonique. Soit $\widetilde{L_\theta}$ le sous groupe analytique de $\widetilde{P_\theta}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_\theta$. Le groupe $\widetilde{L_\theta}$ est le revêtement universel de L_θ. Soit $\pi_1 : \widetilde{L_\theta} \to L_\theta$ la projection canonique.

Pour tout groupe J, on note e_J l'élément neutre de J.

Si w^2 est l'élément neutre e_G de S_2, on choisit un voisinage ouvert $V \subset L_\theta$ de e_{L_θ} satisfaisant les conditions suivantes :

1– Il existe une section $\sigma_1 : V \to \widetilde{L_\theta}$ de l'application π_1 tel que $\sigma_1(e_{L_\theta}) = e_{\widetilde{L_\theta}}$.

2- $V^{-1} = V$.

Si w^2 n'est pas l'élément neutre de S_2, on choisit un voisinage ouvert $V_1 \subset L_\theta$ de e_{L_θ} satisfaisant les conditions suivantes :

1′– Il existe une section $\sigma_1 : V_1 \to \widetilde{L_\theta}$ de l'application π_1 tel que $\sigma_1(e_{L_\theta}) = e_{\widetilde{L_\theta}}$.
2′– $V_1^{-1} = V_1$.
3′– $w^2 V_1 w^2 = V_1$.
4′– $V_1 \cap w^2 V_1 = \emptyset$.

Dans ce dernier cas on pose

$$V = V_1 \cup w^2 V_1.$$

Soit $h \in \mathfrak{h}$ tel que $w^2 = \exp_{L_\theta} h$. On pose $w_1^2 = \exp_{\widetilde{L_\theta}} h$. On a $\pi_1(w_1^2) = w^2$. On étend l'application σ_1 à V de la manière suivante :

$$\sigma_1(w^2 g) = w_1^2 \sigma_1(g), \ g \in V_1.$$

Il est facile de voir que (σ_1, V) est une section de l'application π_1.

On pose $O = VN_\theta^+$, l'ensemble O est donc un voisinage ouvert de l'élément neutre de P_θ sur lequel il existe une section $\sigma : O \to \widetilde{P_\theta}$ de l'application π.

LEMME 3. — *L'ensemble $\Omega = N_\theta^- \cap w^{-1} N_\theta^- O$ est un ouvert non vide de N_θ^-. En particulier, on a $\exp_G(-I^-) \in \Omega$ et $\exp_G(I^-) \in \Omega$.*

Soit $d\lambda_w$ le caractère de $\mathfrak{l}_\theta$ défini par

$$d\lambda_w(x) = -d\lambda(\mathrm{Ad}(w^{-1})x), \quad x \in \mathfrak{l}_\theta.$$

Soit λ_w (resp. λ) le caractère de $\widetilde{L_\theta}$ correspondant à $d\lambda_w$ (resp. $d\lambda$). Pour $g \in O$, on a donc

$$\lambda_w(\sigma(g)) = \lambda^{-1}(\sigma(w^{-1} g w)) = \lambda(\sigma(w^{-1} g^{-1} w)).$$

On va rappeler la construction de Rubenthaler d'un invariant relatif de la représentation $(L_\theta, \mathfrak{n}_\theta^-)$. ([2](théorème 1.4.2 et remarque 1.4.3) et [4]).
Soient $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{p}$ les applications définies sur Ω par

$$wv = \tilde{\gamma}(v)\tilde{p}(v)$$

avec $\tilde{\gamma}(v) \in N_\theta^-$ et $\tilde{p}(v) \in O$.

LEMME 4. — *L'application $\tilde{\gamma}$ est une bijection de Ω sur Ω.*

On note $\tilde{\gamma}^{-1}$ l'application inverse de $\tilde{\gamma}$.

Soit f_{λ_w} la fonction définie sur Ω par

$$f_{\lambda_w}(v) = \lambda_w(\sigma(\tilde{p}(v))),$$

La fonction f_{λ_w} est analytique sur Ω puisque λ_w et $\tilde{p}$ le sont. (C'est cette fonction définie sur $N_\theta^- \cap w^{-1}N_\theta^- P_\theta$ lorsque λ est un caractère de L_θ, qui était considérée dans [2].)

Lemme 5. — *Pour $X \in \mathfrak{l}_\theta$, $v \in \Omega$ et t assez petit, on a*

$$f_{\lambda_w}(\exp_G(tX)v\exp_G(-tX)) = \lambda\lambda_w(\sigma(\exp_G(-tX)))f_{\lambda_w}(v).$$

Nous définissons à présent l'espace $H(\lambda)$ où nous allons réaliser le $\mathfrak{g}$–module irréductible de poids dominant λ en posant

$$H(\lambda) = \{h : \Omega O \to \mathbf{C} |\ h \text{ est analytique}, h(nq) = \lambda_w(\sigma(q))h(n),\ q \in O,\ n \in \Omega\}$$

Soit $X \in \mathfrak{g}$, pour t assez petit et $nq \in \Omega O$ fixé, le produit $(\exp -tX)nq$ est encore dans ΩO, ce qui permet de définir $(\exp tX.h)(nq)$ par

$$\exp tX.h(nq) = h((\exp -tX)nq)$$

On définit alors

$$(X.h)(nq) = \frac{d}{dt}_{|_{t=0}}(\exp tX.h)(nq) = \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} h((\exp -tX)nq)$$

Nous avons ainsi muni $H(\lambda)$ d'une structure de $\mathfrak{g}$–module.
Notons que si $H(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions analytiques sur Ω, l'application restriction des fonctions de $H(\lambda)$ à Ω permet d'identifier $H(\lambda)$ et $H(\Omega)$. Ceci permet de considérer f_{λ_w} comme un élément de $H(\lambda)$ en posant pour $n \in \Omega$ et $q \in O$,

$$f_{\lambda_w}(nq) = \lambda_w(\sigma(q))f_{\lambda_w}(n).$$

On pose également

$$W(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})f_{\lambda_w}.$$

C'est un sous $\mathfrak{g}$–module de $H(\lambda)$.

Lemme 6. — *la fonction f_{λ_w} est un vecteur primitif de poids $d\lambda$.*

LEMME 7. — *Soit* $v \in \Omega$, *on a*

$$w^{-1}v = \tilde{\gamma}^{-1}(v)(\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(v)))^{-1}.$$

Soit γ l'application de $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ dans $SL(2, \mathbf{C})$ donnée par

$$s \longmapsto \gamma(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{s} & 1 \end{pmatrix}.$$

LEMME 8. — *On a* $\varphi\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\exp_{S_2}(tI^-))$

On note R_g la multiplication à droite par g (dans $SL(2, \mathbf{C})$ ou S_2). On note aussi $(d\varphi)_g$ la différentielle de φ au point g. On note e l'élément neutre de $SL(2, \mathbf{C})$, alors on a $d\varphi_e = d\varphi$. On remarque que $\varphi(e)$ est l'élément neutre de S_2 (donc aussi l'élément neutre de G). On note $(dR_g)_x$ la différentielle de R_g au point x.

LEMME 9. — *On a*

$$(d\tilde{\gamma}^{-1})_{\varphi(\gamma(s))}((dR_{\varphi(\gamma(s))})_{\varphi(e)}I^-) = s^2(dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-.$$

LEMME 10. — *Soit* $f \in H(\lambda)$, *soit* $s \in \mathbf{C}$ *tel que* $\exp_{S_2} sI^- \in \Omega$. *Si* f *satisfait l'équation suivante*

$$I^+.f(\exp_{S_2} sI^-) = 0,$$

alors on a

$$(df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) = -s^{-2}Af(\exp_{S_2} sI^-).$$

Où

$$A = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\lambda_w(\sigma((\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^-\tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-)))^{-1}\tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))))$$

est une constante qui ne dépend pas de f.

Preuve : D'après l'hypothèse, on a

$$
\begin{aligned}
0 =&(-I^+).f(\exp_{S_2} sI^-) = \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} f(\exp_{S_2} tI^+ \exp_{S_2} sI^-)\\
&= \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} f(w^{-1}(w\exp_{S_2} tI^+w^{-1})(w\exp_{S_2} sI^-))\\
&= \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} f(w^{-1}\exp(t(\mathrm{Ad}w)I^+)\tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-)\tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))\\
&= \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} f(w^{-1}\exp_{S_2} tI^-\tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-)\tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))
\end{aligned}
$$

d'après le lemme 7

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} [f(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^-\tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-))\\
&\qquad (\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^-\tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-))))^{-1}\tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))]\\
&= \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} [f(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^-\tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-)))\\
&\qquad \lambda_w(\sigma((\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^-\tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-))))^{-1}\tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-)))]
\end{aligned}
$$

D'après le lemme 8, on a $\tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-) = \varphi(\gamma(s))$. On obtient

$$
\begin{aligned}
0 &= (-I^+).f(\exp_{S_2} sI^-)\\
&= \lambda_w(\sigma((\tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))^{-1}\tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))))(\frac{d}{dt}_{|_{t=0}} f(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^-\varphi(\gamma(s)))))\\
&\quad + f(\exp_{S_2} sI^-)\frac{d}{dt}_{|_{t=0}} (\lambda_w(\sigma((\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^-\tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-))))^{-1}\tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))))\\
&= (df)_{\exp_{S_2} sI^-}((d\tilde{\gamma}^{-1})_{\varphi(\gamma(s))}((dR_{\varphi(\gamma(s))})_{\varphi(e)}(I^-))) + Af(\exp_{S_2} sI^-)
\end{aligned}
$$

Où

$$A = \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} (\lambda_w(\sigma((\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^-\tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-)))^{-1}\tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))))$$

En utilisant le lemme 9, On obtient

$$0 = s^2(df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) + Af(\exp_{S_2} sI^-)$$

On a donc

$$(df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) = -s^{-2}Af(\exp_{S_2} sI^-). \qquad \square$$

LEMME 11. — *Soit μ une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$, soit $f \in H(\lambda)$ telle que $H_\theta.f = \mu(H_\theta)f$. On a, pour $\exp_{S_2} sI^- \in \Omega$,*

$$(df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) = \frac{1}{2s}(d\lambda_w(H_\theta) + \mu(H_\theta))f(\exp_{S_2} sI^-).$$

Preuve : D'après les hypothèses, pour $\exp_{S_2} sI^- \in \Omega$, on a

$$(*) \qquad H_\theta.f(\exp_{S_2} sI^-) = \mu(H_\theta)f(\exp_{S_2} sI^-).$$

Or on a

$$\begin{aligned}
H_\theta.f(\exp_{S_2} sI^-) &= \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} f(\exp -tH_\theta \exp_{S_2} sI^-) \\
&= \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} f(\exp -tH_\theta \exp_{S_2} sI^- \exp tH_\theta \exp -tH_\theta) \\
&= \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} f(\exp -tH_\theta \exp_{S_2} sI^- \exp tH_\theta)\lambda_w(\sigma(\exp -tH_\theta)) \\
&= \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} f(\exp(e^{ad(-tH_\theta)}(sI^-)))\lambda_w(\sigma(\exp -tH_\theta)) \\
&= \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} f(\exp(sI^- + 2tsI^-))\lambda_w(\sigma(\exp -tH_\theta)) \\
&= \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} f(\exp(2tsI^-)\exp(sI^-))\lambda_w(\sigma(\exp -tH_\theta)) \\
&= 2s(df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) - d\lambda_w(H_\theta)f(\exp_{S_2} sI^-)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule $(*)$, on a

$$((df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) = \frac{1}{2s}(d\lambda_w(H_\theta) + \mu(H_\theta))f(\exp_{S_2} sI^-). \qquad \square$$

PROPOSITION 12. — *Soit* $\exp_{S_2} sI^- \in \Omega$. *Si* $f(\in H(\lambda))$ *est une fonction propre de poids* μ *pour* $\mathfrak{h}$ *satisfaisant les conditions suivantes*

$$I^+.f(\exp_{S_2} sI^-) = 0, \quad f(\exp_{S_2} sI^-) \neq 0,$$

alors on a

$$\mu(H_\theta) = -2s^{-1}A - d\lambda_w(H_\theta).$$

Où A *est la constante indépendante de* f *définie dans le lemme 10.*

Preuve : Puisque la fonction f satisfait les hypothèses du lemme 10, on a

$$(df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) = -s^{-2}Af(\exp_{S_2} sI^-).$$

Puisque la fonction f satisfait les hypothèses du lemme 11, on a

$$(df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) = \frac{1}{2s}(d\lambda_w(H_\theta) + \mu(H_\theta))f(\exp_{S_2} sI^-).$$

Ces deux équations montrent que

$$-s^{-2}Af(\exp_{S_2} sI^-) = \frac{1}{2s}(d\lambda_w(H_\theta) + \mu(H_\theta))f(\exp_{S_2} sI^-).$$

Puisque $f(\exp_{S_2} sI^-) \neq 0$, on a

$$\mu(H_\theta) = -2s^{-1}A - d\lambda_w(H_\theta). \qquad \square$$

Puisque les valeurs de f_{λ_w} sont toujours non nulles, la proposition 12 nous donnent la formule suivante

(1) $$d\lambda(H_\theta) = -2s^{-1}A - d\lambda_w(H_\theta).$$

Supposons maintenant que ω est un autre vecteur primitif de $W(\lambda)$ dont le poids μ est strictement inférieur à $d\lambda$, et considérons $E = \mathcal{U}(\mathfrak{g})\omega$ le sous $\mathfrak{g}$−module propre de $W(\lambda)$ engendré par ω.

LEMME 13. — *Pour $s = 1$ ou -1, il existe une fonction $h \in E$ satisfaisant $h(\exp_{S_2} sI^-) \neq 0$.*

Comme toute fonction dans E est somme de fonctions propres pour $\mathfrak{h}$, on peut donc supposer que h est une fonction propre de poids μ pour $\mathfrak{h}$ et que le poids μ est maximal parmi les poids des fonctions propres qui ne s'annulent pas au point $\exp_{S_2} sI^-$ ($s = 1$ ou -1). On a donc

$$I^+.h(\exp_{S_2} sI^-) = 0, \ s = 1 \text{ ou } -1.$$

D'après la proposition 12, on a

(2) $$\mu(H_\theta) = -2s^{-1}A - d\lambda_w(H_\theta), \ s = 1 \text{ ou } -1.$$

D'aure part (1) et (2) nous donnent la formule

(3) $$d\lambda(H_\theta) = \mu(H_\theta).$$

LEMME 14. — *Le poids μ est de la forme $d\lambda - \sum \beta_i$ avec $\beta_i(H_\theta) \geq 2$.*

Le lemme 14 montre que (3) est impossible. L'existence de ω nous donne une contradiction. La fonction f_{λ_w} est donc le seul vecteur primitif de $W(\lambda)$ (à la multiplication par une constante près). Le module $W(\lambda)$ est donc irréductible. On obtient ainsi le résultat principal suivant.

THÉORÈME 15. — *Le $\mathfrak{g}$-module $W(\lambda)$ est irréductible de poids dominant $d\lambda$ (l'élément f_{λ_w} est le vecteur primitif associé).*

Remarque 16
a) Dans le cas où $\mathfrak{n}_\theta^+$ *était commutative et* $\mathfrak{g}$ *de type classique, Suga* [5] *avait obtenu, par un calcul cas par cas, un résultat analogue à partir de l'invariant relatif global de l'espace préhomogène associé. Nous avons par ailleurs montré que sa méthode s'étendait au cas exceptionnel. La méthode employée ici est différente.*
b) Dans le cas $\theta = \emptyset$ *on a* $\mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{h}$ *et notre construction donne alors une réalisation de n'importe quel* $\mathfrak{g}$*−module irréductible ayant un poids dominant. Dans le cas où* $d\lambda$ *est le caractère de plusieurs sous algèbres de Levi vérifiant la condition de la définition 1, on obtient autant de réalisations distinctes du* $\mathfrak{g}$*−module de poids dominant* $d\lambda$.
c) Dans le cas où $d\lambda$ *est dominant, c'est à dire qu'il correspond à une représentation de dimension finie de* $\mathfrak{g}$*, notre résultat est bien sûr à rapprocher du classique théorème de Borel-Weil (voir par exemple Knapp* [6], *théorème* 5.9)

Bibliographie. —

[1] A. Gyoja. — *Invariants, Nilpotent Orbits, and Prehomogeneous Vector Spaces*, J. of Algebra. 142, 1991, p. 210-232.

[2] H. Rubenthaler. — *Espaces préhomogènes de type parabolique* , Thèse, Université de Strasbourg, 1982.

[3] H. Rubenthaler. — *Construction de certaines sous-algèbres remarquables dans les algèbres de Lie semi-simples*, J. Alg., 81, 1983, p. 268-278.

[4] H. Rubenthaler. — *Espaces préhomogènes de type parabolique*, Lect. Math. Kyoto Univ. 14, 1982, p. 189-221.

[5] S. Suga. — *Highest weight modules associated with classical irreducible regular prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type*, Osaka J. Math. 28, 1991, p. 323-346.

[6] A. Knapp. — Representation Theory of Semisimple Groups. An Overview Based on Examples, *Princeton Univ. Press, Princeton New Jersey,* 1986.

Institut de Recherche Mathématique Avancée(IRMA)
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg cedex
e-mail : zhu@math.u-strasbg.fr